$\zeta(2)$ に関するあれこれ

齋藤　正顕　(工学院大学)*

すべての自然数の2乗の逆数の和の値は $\pi^2/6$ である, つまり

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

であることはよく知られている．ここで, $\zeta(2)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ $(\mathrm{Re}(s)>1)$ の $s=2$ における値である．この値を求める問題は「バーゼル問題」といわれ, オイラーが解決したとされる．証明方法は沢山あるが, ここではフーリエ級数の性質を用いた証明の概略を述べる．1周期分の波形が $f(x)=x$ $(-\pi<x\leq\pi)$ で与えられる周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ展開は

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$$

である．ここでフーリエ級数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ に対して成り立つパーセバルの等式 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx$ を用いると

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\}^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

となって $\zeta(2)$ の値を得る．じつはこの "$\zeta(2)$"（およびその類似物）はいろんなところに顔を出す．例えば, N 以下の自然数の組 (a,b) が互いに素となる確率は N が大きくなるとき漸近的に $1/\zeta(2)=6/\pi^2$ に等しい．また, H^3 を3次元上半空間とし, $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ を1の原始3乗根とするとき, $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z}[\omega])$ の指数12の部分群 $\Gamma=\left\langle\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\\omega&1\end{bmatrix}\right\rangle$ に対し, 軌道空間 $M=H^3/\Gamma$ の体積は

$$\mathrm{vol}(M)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}(2)}{\zeta(2)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}L(\left(\tfrac{-3}{\cdot}\right),2)=2.02988\ldots \tag{1}$$

と表される [6]．ここで $\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt{-3})}(2)$ は代数体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ のデデキントゼータ関数, $L(\left(\frac{-3}{\cdot}\right),2)$ はクロネッカー記号 $\left(\frac{-3}{\cdot}\right)$ に関する L 関数の $s=2$ における値である．$\mathrm{vol}(M)$ は8の字結び目の双曲体積とも一致する．次に, グラフまたはコンパクトなリーマン多様体 X に対して, 以下のようなゼータ関数 (X のスペクトルゼータ関数) を考える:

$$\zeta_X(s)=\sum_{\lambda\neq 0}(\mathrm{sgn}\,\lambda)|\lambda|^{-s},$$

ここで, 和は X のラプラシアン Δ_X の0でないすべての固有値 λ をわたり, $\mathrm{Re}(s)$ は X に依存し適切に大きいとする． $X=S^1$ のとき, 固有値は $\{4\pi^2n^2|n=0,1,\ldots\}$, $\zeta_{S^1}(s)=(4\pi^2)^{-s}\zeta(2s)$ であるから, スペクトルゼータの $s=1$ での値 $\zeta_X(1)$ がリーマン

* e-mail: saito.seiken@cc.kogakuin.ac.jp

ゼータの $s=2$ における値 $\zeta(2)$ の類似物であることに注意する．X が有限グラフの場合は $\zeta_X(s)$ は有限和である．例えば, X が n 頂点のサイクルグラフ C_n のとき, ラプラシアンの固有値は $4\sin^2\frac{\pi k}{n}(k=1,\ldots,n)$ だから $\zeta_{C_n}(s)=\sum_{k=1}^{n-1}(4\sin^2\frac{\pi k}{n})^{-s}$ である．このとき

$$\zeta_{C_n}(1)=\sum_{k=1}^{n-1}(4\sin^2\frac{\pi k}{n})^{-1}=\frac{n^2-1}{12}=\frac{1}{n}Kf(C_n)$$

となる．ここで $Kf(C_n)=\frac{n^3-n}{12}$ は グラフ C_n のキルヒホッフ指数である．キルヒホッフ指数とはグラフを各辺が単位抵抗を持つような電気回路と見たときの, すべての隣接2頂点間の抵抗の和である．サイクルグラフの電気抵抗は大きい．ちなみに n 頂点の完全グラフ K_n の場合は $Kf(K_n)=n-1$ となり, n が大きいときはサイクルグラフに比べてずっと小さい．$\zeta_{C_n}(1)$ とリーマンゼータ値 $\zeta(2)$ の関係としてすぐに $\lim_{n\to\infty}\frac{2\zeta_{C_n}(1)}{n^2}=\frac{1}{\pi^2}\zeta(2)$ がわかるが, この極限公式が成り立つ背景については [2, 3] を参照のこと．興味深いのは $\zeta_{C_n}(s)$ が共形場理論における共形ブロックのなす線形空間の次元公式 (Verlinde の公式) と関係していることである [4]．キルヒホッフ指数と Verlinde の公式の関係については論文 [1] がある．話は変わるが, リーマンゼータの負の偶数 $s=-2m$ での値は $\zeta(-2m)=\frac{B_{2m+1}}{2m+1}$ (B_{2m+1} はベルヌーイ数) である．これに対応する C_n と $\mathbf{Z}$ のスペクトルゼータの値は

$$\zeta_{C_n}(-m)=\sum_{k=1}^{n-1}(4\sin^2\frac{\pi k}{n})^m=n\binom{2m}{m}\quad(0<m<n\text{ のとき}),\qquad \zeta_{\mathbf{Z}}(-m)=\binom{2m}{m}$$

となる [3]．右辺の $\binom{2m}{m}$ は $\mathbf{Z}$ 上のランダムウォーカーが $2m$ ステップで原点に戻る回数に等しい．$2m<n$ のとき, 局所的にサイクルグラフ C_n と整数格子 $\mathbf{Z}$ は見分けがつかないのでこのような類似性がある．今度は C_n のラプラシアンの固有値の (一部の) 積を考える．実数 x に対し $[x]$ を x を越えない最大の整数とするとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\log\Big(\prod_{k=1}^{[5n/6]}4\sin^2\frac{\pi k}{n}\Big)=\mathrm{vol}(M)$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{vol}(M)$ は体積 (1), つまり8の字結び目の双曲体積に等しい．上記は8の字結び目の体積予想に関連する式でもある [5]．あれこれ関係していて興味深い．

謝辞

有益な議論をして下さった長谷川武博氏（滋賀大学）に感謝いたします．

参考文献

[1] N. Chair, *Trigonometrical sums connected with the chiral Potts model, Verlinde dimension formula, two-dimensional resistor network, and number theory*, Annals of Physics 341 (2014), 56–76.

[2] G. Chinta, J. Jorgenson and A Karlsson, *Zeta functions, heat kernels, and spectral asymptotics on degenerating families of discrete tori*, Nagoya Math. J. 198 (2010), 121–172.

[3] F. Friedli and A. Karlsson, *Spectral zeta functions of graphs and the Riemann zeta function in the critical strip*, Tohoku Math. J. (2) 69 (2017), no. 4, 585–610.

[4] A. Karlsson, *Spectral zeta functions*, Oper. Theory Adv. Appl., 281 Birkhäuser/Springer, Cham, 2020, 199–211.

[5] 村上順, 結び目理論–分解定理・不変量・体積予想–, 森北出版, 2021.

[6] W. P. Thurston, The Geometry and Topology of Three-Manifolds (Chapter 7, ”Computation of Volume’; by J. Milnor). Mimeographed lecture notes, Princeton University 1979.